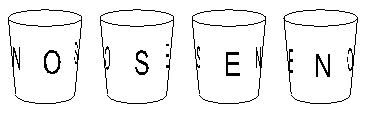
**Nivel 2(9no y 10mo año de escolaridad)**

1

Encontrar dos números enteros positivos *A* y *B* tales que 3 · *A*2 - *B*2 + 4 sea positivo y múltiplo de 77.

2

Se escriben cuatro dígitos positivos *N*, *O*, *S*, *E* en un vaso de cerámica, cada uno en su punto cardinal. Los 4 números de 4 cifras que pueden leerse girando el vaso (*NOSE*, *OSEN*,*SENO*, *ENOS*) son múltiplos de 18.   
a) Hallar un ejemplo de *N*, *O*, *S*, *E* que cumplan esta condición.  
b) ¿Cuántos modelos distintos de vasos puede haber que cumplan esta condición?  
Nota: Los vasos 1739, 7391, 3917 y 9173 son del mismo modelo, pero el vaso 1379 es de otro modelo.



3

Durante el año pasado tres voluntarios juntaron 185893207 tapitas plásticas para la Fundación Hospital Garrahan. Cada uno juntó siempre la misma cantidad de tapitas por día, pero Carlos juntó por día el triple que Bruno, y Bruno el triple que Alfredo. Para compensar un poco, Alfredo trabajó el doble de días que Bruno, y Bruno el doble que Carlos.  
¿Cuántos días trabajó cada uno? (Dar todas las soluciones válidas.)

1

Hallar todas las soluciones, con *A*, *B* y *C* enteros, de la ecuación

2008 · *A*2 + 2009 · *B*2 + 2010 · *C*2 = 14241444

2

a) Entre todos los múltiplos de 2008, ¿cuántos tienen 6 cifras?

b) Entre todos los múltiplos de 2008 terminados en 4, ¿cuántos tienen 6 cifras? Por ejemplo 166664, 467864, 628504, etc.

3

N es un entero positivo que tiene exactamente 9 divisores y sus divisores suman 187131. ¿Cuánto vale N?

a) Encontrar 1 solución.

b) Encontrar todas las soluciones. Por ejemplo, 6 tiene 4 divisores, que suman 1 + 2 + 3 + 6 = 12.

1

Elegir cuatro números enteros positivos *A*; *B*; *C* y *D* tales que

(*A*2 + *B*2) · (*C*2*+* *D*2) = 165681

2

Encontrar cuatro divisores enteros positivos de *N* = 2007014018 que sean distintos de 1 y del número *N*.

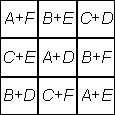
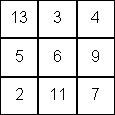
*Nota: Los divisores de 12 que no son ni 1 ni 12 son 2, 3, 4 y 6.*

3

En un zoológico tienen una exposición de ciempiés y milpiés, pero ninguno de ellos tiene exactamente 100 ni 1000 pies. La mitad de los ciempiés tiene 46 pies (cada uno) y la otra mitad tiene 86 (cada uno). La mitad de los milpiés tiene 92 pies (cada uno) y la otra mitad tiene 102 (cada uno). En la exposición hay en total 7002 pies. ¿Cuántos animales de cada tipo hay?

1

Se eligen seis números enteros no negativos *A*; *B*; C; *D*; *E;* *F* y con ellos se llena una tablero de 3x3 como se muestra a la izquierda. Al realizar las operaciones se obtiene el tablero de la derecha. Encontrar una posible elección de los seis números originales.

2

Encontrar tres dígitos *X*; *Y*; *Z* tales que

*X* · *XY* · *Y* · *YZ* · Z · *ZX* = 40544784

Nota: *XY*, *YZ* y *ZX* son números de dos cifras.

3

Se necesita comprar al menos 300 foquitos para un edificio nuevo. Se venden en paquetes grandes de 42 unidades y paquetes chicos de 34 unidades. El paquete grande cuesta $35 y el chico $31. Además se puede comprar medio paquete, pero con un recargo. El medio paquete grande cuesta $20 y el chico $18. ¿Cuánto es lo mínimo que se debe gastar?

1

Buscar dos números de una cifra *A* y *B* tales que

*AB* · *ABAB* · *AABB* = 154713416

*Nota: En la fórmula, AB es un número de dos cifras, y ABAB y  AABB  son números de cuatro cifras.*

2

Encontrar un número entero positivo que sea divisor de 17784 y que tenga exactamente 18 divisores.

*Nota: El número 12 tiene 6 divisores que son 1, 2, 3, 4, 6, 12.*

3

Beremiz cuenta la cantidad de formas distintas de elegir números enteros positivos *A*; *B*; *C* tales que *A* + *B* + *C* = 100

Samir, en cambio, cuenta solamente las posibilidades anteriores en las que *A* £ *B* £ *C*.

Calcular el cociente de la división entre ambos números.

*Nota: No, no da 6.*

1

La ecuación

1/x+2/y+3/z=2

tiene muchas soluciones en las que X; Y; Z son números enteros mayores que 1, por ejemplo:  
X = 2;Y = 4; Z = 3  
X = 2;Y = 2; Z = 6  
X = 3;Y = 3; Z = 3  
X = 4;Y = 2; Z = 4  
Encontrar otras dos soluciones con números enteros mayores que 1, que no sean ninguna de las nombradas.

2

Encontrar tres números enteros, el primero de 1 cifra, el segundo de 2 cifras y el tercero de 3 cifras, tales que al multiplicarlos se obtiene 396865

3

Cada día se agregan 5000 litros de agua a una pileta que inicialmente esta vacía. Por la noche pierde un 10% (debido al agua que toman los murciélagos). ¿Cuántos días hay que esperar para que al llegar por la mañana la pileta tenga por lo menos 40000 litros?

1

Encontrar todas los pares de números de cuatro cifras de la forma (R2D2 ; C3PO) tales que R2D2 \* C3PO es un número que termina en 7094.  
Nota: O es la letra ‘O’, no es un 0 (cero).

2

Se define la sucesión *TiK*(*n*) de la siguiente manera:

*TiK*(1) := 2;  
*TiK*(*n*+1) := el primer primo en la sucesión *f*(*TiK*(*n*)), *f*(*f*(*TiK*(*n*))), *f*(*f*(*f*(*TiK*(*n*)))), …  
donde *f*(*k*): = 2 · *k* + 1.

Calcular todos los términos *TiK*(*n*) de la sucesión tales que TiK(*n*) < 232.

Por ejemplo *TiK*(5) = 47 y entonces *TiK*(6) = 191, porque *f*(*TiK*(5)) = *f*(47) = 95 que no es primo y *f*(*f*(*TiK*(5))) = *f*(*f*(47)) = *f*(95)=191 que es primo.

3

a) ¿Cuántos triángulos distintos hay, que tengan todos los lados enteros y perímetro 48?  
b) ¿Y con perímetro 95?  
c) ¿Y con perímetro 96?  
d) ¿Y con perímetro 2005?

No importa el orden de los lados de un triángulo. Consideramos al triángulo de lados 4; 5; 8 igual que el triángulo de lados 8; 5; 4. Tampoco consideramos válidos a los "triángulos degenerados", o sea, los que corresponderían a tres puntos alienados.

Nota: Tres segmentos no siempre forman triángulo. Por ejemplo 20; 3; 4 no son los lados de un triángulo.

1

Encontrar un número entero *X* tal que   
*X* 3 - 241 · *X* 2 - 123573 · *X* - 5723523 = 0 .

2

¿Cuál de los siguientes diez números tiene más divisores enteros positivos:  
23032, 23132, ..., 23832, 23932 ?

3

Los pesos de tres objetos de diferentes materiales son números enteros. Todos juntos pesan 5000. Al sumergirlos en agua, la balanza marca 10% menos para el primer objeto, 30% menos para el segundo, y 87% menos para el tercero, marcando en total 4470. ¿Cuánto pesa cada objeto?  
Aclaración: Los valores de los objetos sumergidos pueden no ser enteros.

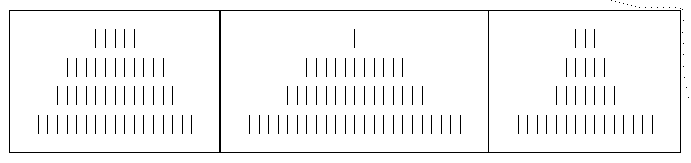
1

Se buscan los pares de enteros positivos (X,Y), tales que el numero   
x2  y + 8  x  y + 4  y2   
empieza con 8 y termina con 3  
a) ¿**Cuáles** son los pares en que x e y son ambos menores que 100?  
b) ¿**Cuántos** son los pares en que x e y son ambos menores que 1000?  
Nota: Por ejemplo 820043 es un número que empieza con 8 y termina con 3.

2

El Nim es un popular juego para dos jugadores, que tiene muchas variantes. En todas ellas el "tablero" consiste en varias filas con una cantidad impar de palitos, la fila superior con menos palitos y la inferior con más. Cada fila tiene estrictamente más palitos que la fila inmediatamente superior. Y todas las filas tienen por lo menos un palito. También puede variar la cantidad de filas.

En la variante que consideramos hay 4 filas, y cada una de ellas puede tener hasta 85 palitos inclusive (Ver figura). ¿Cuántos "tableros" posibles hay?



3

Para cada valor fijo de k el conjunto de puntos   
{ (x,y): x2 - y2 = k }  
es una hipérbola distinta. Hallar un valor de k entero positivo menor o igual que 10000 tal que la cantidad de soluciones de x2- y2 = k con x e y enteros no negativos sea máxima.

1

Sean *A*; *B* y *C* tres números enteros positivos tales que 20 · *A*+ 3 · *B*+ 2003 · *C*= 21633600. Además *B* es múltiplo de *A* y también se sabe que *C* es múltiplo de *B*. Encontrar todas las posibilidades.

2

En un juego se elige un número entero positivo *A* de cinco cifras. El puntaje es igual a la suma de los dígitos de 2003·*A*. Por ejemplo si se toma un valor de *A* de 31415 se obtienen 34 puntos. ¿Cuál es el máximo puntaje que se puede obtener en este juego?

3

Buscar un número entero positivo distinto de 1, que sea divisor de 2030275616 y que tenga todas sus cifras impares.

1

Buscar un número entero positivo mayor que 1000 que sea primo y además empiece con 90 y termine con 51. (Por ejemplo 90948051 es un número que empieza 90 y termina con 51.)   
Nota: Los números primos son los que tienen como únicos divisores al 1 y a sí mismos, por ejemplo 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

2

Encontrar tres números enteros positivos *X*; *Y*y *Z* , tales que (*X* + *Y*) · (*Y* + *Z*) · (*Z* + *X*) = 83334

3

En un negocio venden alfajores sueltos por mayor, así que hacen un descuento por cantidad. Si se compran *N* alfajores juntos el precio de cada uno es de pesos   
1 - N/1000 + N2 / 2000000 . Por ejemplo si se compran 150 alfajores se debe pagar $129,1875 La máxima cantidad de alfajores que se puede comprar es 1000. ¿Cuántos alfajores se podrá comprar con $300?   
Nota: En este negocio hacen todas las cuentas sin redondear los valores.

1

Según las disposiciones legales de Truchilandia, para dar un vuelto de $20002 se deben utilizar exactamente 808 moneditas. Pero las únicas moneditas que hay son las de $17, $23 y $31. ¿De cuántas formas distintas es posible dar el vuelto?  
Nota: Las moneditas se entregan todas juntas en un montoncito desordenado.

2

Encontrar un número entero positivo N tal que la suma de las cifras de N2 sea 63. Encontrar otro más con la misma propiedad.

3

Dados dos números enteros positivos 1<=a<100 y 1<=b<100, calculamos:  
· P = la cantidad de números primos de la forma a · k + b (k entero no negativo), menores que 10000  
· T = la cantidad de números de la forma a · k + b (k entero no negativo), menores que 10000  
Hallar los valores de a y b de manera que al hacer la división P/T se obtenga el máximo valor posible.  
(Por ejemplo, los números de la forma 50 · k + 2 (k entero no negativo), menores que 10000, son: 2, 52, 102, 152, ... , 9852, 9902, 9952)  
(Nota: Un número es primo si solamente se puede dividir por el número 1 y por sí mismo. Por ejemplo 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... )

1

Encontrar dos entero positivos n y z tales que 2n + 5089 = z2.

2

Un divisor d de 3683488 es un superdivisor si la suma de las cifras de d también divide a 3683488. Encontrar todos los superdivisores de 3683488.

3

Definimos el sumarial de n como suma desde i=1 hasta n de (suma desde j-=1 hasta i de (j))

Por ejemplo, el sumarial de 5 es: (1) + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + (1+2+3+4+5) = 35.

Definimos g(k) como el resto de sumarial de k al dividirlo por k+1, por ejemplo g(5) vale 5, que es el resto de la división entera de 35 por 6.  
Definimos además f(n) como suma desde k=1 hasta n de (g(k)) , por ejemplo f(5) es 1 + 1 + 2 + 0 + 5 =9  
i) Hallar f(148).  
ii) Hallar f(4003).

1

Encontrar todos los números de cuatro cifras *N* tales que las últimas cuatro cifras de *N*2 son iguales al número *N*.

Por ejemplo, las últimas cuatro cifras de 3662 2 son 0244, así que 3662 no sirve.

2

a) Dar una lista de todos los números enteros positivos menores que 100000 que tienen por lo menos 119 divisores.

b) Dar una lista de todos los números enteros positivos menores que 1000000 que tienen por lo menos 219 divisores.

Nota: Por ejemplo, 60 tiene 12 divisores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

3

Encontrar cuatro números enteros positivos *X* ; *Y* ; *Z* ; *W* todos distintos entre sí, que estén entre 200 y 500 y que verifiquen que *X*2+ *Y*3= *Z*2 + *W*3 .

1

¿Cuántos números enteros positivos de cuatro cifras son divisibles por la suma de sus cifras?

2

Decidir si es posible elegir nueve números enteros positivos de una cifra (o sea, que todos sean mayores que 0 y menores que 10) de manera que verifiquen simultáneamente las siguientes tres condiciones:

* el resultado de sumar estos nueve números es 45
* el resultado de multiplicar estos nueve números es 362880
* los nueve números no son todos distintos

3

Encontrar todos los números enteros positivos de 3 cifras, que no tengan ninguna cifra igual a cero, tales que todas las permutaciones de sus cifras seas números primos.Por ejemplo al permutar las cifras de 237 se obtiene: 237, 273, 327, 372, 723, 732. Pero lamentablemente ninguno de estos números es primo.

1

Encontrar todos los números de tres cifras *n* tales que el número que se obtiene al dar vuelta las cifras de *n*2 es un múltiplo de *n*.

(Nota: Al dar vuelta las cifras de 1453 se obtiene 3541 .)

2

¿Cuál o cuáles son los números enteros positivos entre 1 y 10000 que se pueden expresar de más maneras distintas como suma de dos primos?

Por ejemplo 26 se puede escribir de 5 maneras distintas porque 26 = 3+23 = 7+19 = 13+13 = 19+7 = 23+3 .

(Nota: 0 y 1 no son primos)

3

¿Cuántos pares de números enteros (*a*, *b*) existen tales que 0<*a*<*b*<1000 y además *a* + (*a*+1) + ... + (*b*-1) + *b* es múltiplo de 30?

1

Un número entero positivo es apentoso si es imposible escribirlo como el producto de cinco números enteros positivos mayores que 1. ¿Cuántos números enteros positivos entre 1 y 1000000 (ambos extremos incluidos) son apentosos?

2

¿Cuántos números hay de ocho dígitos que no contengan al cero en su expresión decimal ni tampoco dos dígitos pares consecutivos?  
(Por ejemplo: 83996745, 78989143, 19359991, ...)

3

Encontrar un número entero positivo N tal que las ultimas cuatro cifras de N7 sean 1119.  
(Las ultimas cuatro cifras de 2320772 son 0772.)  
(Nota: 0 y 1 no son primos)

1

Decir cuántas son las ternas de números enteros positivos *X*, *Y*, *Z* que cumplen simultáneamente las inecuaciones

*X*2 + *Y*2 + *Z*2 =< 14984

*X* + 2 ∙ *Y* + 3 ∙ *Z* >= 456.

2

Entre los divisores de 20102010 hallar el más grande que sea menor que 10000.

3

a) ¿Cuántos números formados exclusivamente por los dígitos 3 y 7, y divisibles por 3 y por 7, son menores a 100000?

b) ¿Cuántos números formados exclusivamente por los dígitos 3 y 7, y divisibles por 3 y por 7, son menores a 100000000?

1

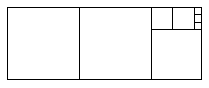
a) Buscar un *X* entero positivo tal que 3·*X*3 - 4018·*X*2 + 1020305·*X* + 229445566 < 0.

b) ¿Cuántos cumplen esta propiedad?

2

¿Cuántos triángulos rectángulos no congruentes tienen área que divide a 20092009?

3

Si nos dan un rectángulo de lados *A* y *B* (con *A* > *B* > 0, *A* y *B* enteros), lo llenamos con cuadrados de la siguiente manera, por pasos: en el primer paso, llenamos con cuadrados de lado *B*, sin superponerlos, sin espacio entre ellos, empezando desde el borde izquierdo, hasta que ya no se puede más; en los siguientes pasos llenamos el rectángulo que queda libre con cuadrados cuyo lado sea igual al lado más chico del rectángulo, sin superponerlos, sin espacio entre ellos, empezando desde el borde izquierdo o inferior según corresponda; como en la figura. El proceso termina cuando llenamos todo el rectángulo *A*x*B*.

Para cada uno de los 10 rectángulos cuyos lados (distintos) son 2 de estos números,  
410105312, 150869313, 832040, 514229, 2009  
hallar en cada caso:

- la cantidad de cuadrados usados para llenarlo según el procedimiento anterior, y

- el lado del cuadrado más chico que se usó.

1

Encontrar tres números enteros positivos *A*, *B* y *C* tales que *A* < *B* < *C* y

208·*A* + 45·*B*2 + *C*3 = 8266

2

a) ¿Cuántos números primos de cuatro cifras son de la forma *ABBA*, con las cifras *A* y *B* distintas?

b) ¿Cuántos números primos de cuatro cifras son de la forma *ACDC*, con las cifras *A*, *C* y *D* todas distintas?

3

Llamemos *s*(*N*) a la suma de los divisores propios de *N*. Por ejemplo si *N* = 6, sus divisores propios son 1, 2 y 3, entonces *s*(6) = 6; en cambio si N = 12, sus divisores propios son 1, 2, 3, 4 y 6, entonces *s*(12) = 16.

a) Hallar todos los enteros positivos *N* menores a 1000000 tales que *s*(*N*) = *N* - 2.

b) Hallar todos los enteros positivos *N* menores a 1000000 tales que *s*(*N*) = *N* - 1.

c) Hallar todos los enteros positivos *N* menores a 1000000 tales que *s*(*N*) = *N* .

d) Hallar todos los enteros positivos *N* menores a 1000000 tales que *s*(*N*) = *N* + 1.

e) Hallar todos los enteros positivos *N* menores a 1000000 tales que *s*(*N*) = *N* + 2.

1

Se consideran todas las ternas de números enteros positivos *X*, *Y* y *Z*tales que

*X* + 2 · *Y* + 3 · *Z* = 2007

y para cada una de ellas se calcula el producto

*X* · *Y* · *Z*

a) ¿Es posible obtener un número mayor a 50000 como resultado de esta multiplicación?

b) ¿Es posible obtener un número mayor a 1000000?

c) ¿Cuál es el número más grande que se puede obtener?

2

Encontrar dos cifras no nulas *A* y *B* tales que los números *A*000*B* y *B*000*A* son ambos primos.   
*Nota: Los primos positivos son los números enteros mayores que 1 que sólo pueden dividirse por 1 y por si mismos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...*

*Nota: A000B indica el número de cinco cifras formado por A, tres ceros y B.*

3

Se quiere hacer un mosaico de 100x100 cuadraditos formado por cuadraditos de 1x1. Estos se compran en planchas de 30x30, 31x31, 32x32, 33x33, ... cuadraditos de 1x1. Se deben comprar planchas de dos tipos, pues cada tipo es de un color diferente, y el mosaico debe llevar cuadraditos mezclados en 2 colores. Además por motivos ecológicos se quiere que no sobre ningún cuadradito al terminar el trabajo. ¿Cuáles son los posibles tamaños de cada tipo de planchas? ¿Cuántas se deben comprar de cada una en cada caso?